УДК 330.43+004.67

М. М. Немирович-Данченко

ФГБОУ ВО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники», Томск, e-mail: nmm@fb.tusur.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОНИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В ЭКОНОМИКЕ

Ключевые слова: временные ряды, моделирование, преобразование Прони, прогноз, спектральное оценивание, индекс потребительских цен.

В статье рассматривается решение задач моделирования и прогноза числовых рядов с применением методологии спектрального оценивания. Использование качественных моделей данных позволяет выполнять достоверный прогноз, что является актуальной задачей при принятии управленческих решений. В основе прогнозной методологии лежит преобразование Прони, позволяющее представлять исходный числовой ряд в виде нового ряда – некоторой линейной комбинации экспоненциальных функций. В общем случае комплекснозначные слагаемые нового ряда полностью определяются амплитудой, частотой, фазой и затуханием. В работе приводятся основные понятия и соотношения преобразования Прони, анализируется поведение отдельных компонент преобразования для типичных случаев. Рассмотрены особенности вычисления спектра Прони и отличия его от спектра Фурье. Обсуждаются отдельные этапы работы алгоритма, проблемы конкретной реализации. С применением описанной методики и на основе написанной автором программы строится модель месячного изменения индекса потребительских цен в России за несколько последних лет, показана возможность прогноза на основе такой модели.

М. М. Nemirovich-Danchenko

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk,
e-mail: nmm@fb.tusur.ru

APPLICATION OF PRONY-TRANSFORM FOR TIME SERIES MODELING IN ECONOMICS

Keywords: time series, modeling, Prony-transform, forecasting, spectral estimation, consumer price index.

In article the decision of problems of modelling and the forecast of numerical numbers with application of spectral estimation methodology is considered. Use of qualitative models of data allows to carry out the authentic forecast that is an actual problem at acceptance of administrative decisions. The forecast methodology based on a Prony-transform, allowing to represent an initial numerical number in the form of new of some – to some linear combination exponential functions. Generally complex member of the series are defined by amplitude, frequency, a phase and attenuation. In work the basic concepts and parities of Prony-transform are resulted, the behaviour separate a component of transformation for typical cases is analyzed. Features of calculation of Prony-spectrum and its differences from Fourier-spectrum are considered. Separate stages of work of algorithm, a problem of specific realization are discussed. With application of the described procedure and on the basis of the program written by the author the model of monthly variation of a consumer price index in Russia for some last years is under construction, the possibility of the forecast on the basis of such model is shown.

Введение

Перед исследователями часто возникает задача – как на основе уже имеющихся пространственно-временных наблюдений за процессом или явлением составить представление о том, каковы могли бы быть значения предстоящих наблюдений. Существенным и измеряемым свойством такого прогноза является его достоверность. В основе прогнозирования должны лежать обоснованные предположения о тех характеристиках

(или механизмах) процессов, с которыми можно связать меняющиеся данные. Эти предположения формулируются как модели – от эвристических до математических, при этом методы исследования можно подразделять на интуитивные и формализованные. [1]. В настоящей работе нами рассматривается формализованный метод – метод спектрального оценивания с использованием рядов Прони [2]. На основе применения это-

го метода строится модель временного ряда, она опробуется на тестовых последовательностях и используется для прогноза поведения некоторых экономических показателей.

Задачи анализа числовых рядов и задачи прогноза числовых рядов, вообще говоря, различны. Каждое из этих направлений имеет свои традиции в исследованиях, свои наработанные методы решения [3]. Так, одной из актуальных задач анализа числовых данных является выделение характерных особенностей, признаков, позволяющих идентифицировать конкретный набор данных для его последующей классификации [4-5]. При решении задач прогноза поведения числовых рядов исследователи интересуют не столько собственно особенности поведения того или иного подмножества данных, сколько выявление таких атрибутов числовых рядов, которые позволяют оценить значения рядов вне области наблюдения. [6-7]. При этом существуют такие методы прогноза (например – метод скользящего среднего), которые вряд ли могут быть применены для анализа. С другой стороны, такие практические методы анализа, как, например, режекторная фильтрация, не могут быть непосредственно использованы при прогнозе.

Но можно выделить одну группу методов, общую как для анализа, так и для прогноза, а именно – методы спектрального оценивания. Они продуктивно используются в теоретических и практических исследованиях для широкого круга задач анализа и прогноза числовых рядов [2].

Опыт применения преобразования Фурье (ПФ) при прогнозе временных рядов рассмотрен в ряде работ [2, 8-11]. Анализ этих работ показывает, что непосредственно прогноз с применением ПФ невозможен. Поясним это на простом примере: пусть прямое ПФ выполняется для некоторого временного ряда $y(t)$, содержащего N точек. Очевидно, что при выполнении обратного ПФ значения будут повторяться через каждые N отсчетов. Таким образом, как отмечает автор [10], при использовании ПФ «любой прогноз является точным повторением временного ряда с его начала». Отсюда становится понятным,

что непосредственное применение спектров Фурье для задач прогноза невозможно – начальные значения ряда лишь в специально оговариваемых случаях могут быть близки к прогнозируемым величинам.

Предлагаемое в настоящей работе преобразование Пронь лишено этого недостатка. Оно по сути своей является методом спектрального оценивания, имеет приближенный характер и может быть непосредственно использовано при прогнозе.

Метод Пронь

Преобразование Пронь (ПП), как и преобразование Фурье, основано на разложении функции в ряд. ПП, в отличие от ПФ, не является спектральным преобразованием в чистом виде, а является способом оценивания (как метод наименьших квадратов) дискретных данных с помощью линейной комбинации экспоненциальных комплекснозначных функций.

Автор этого подхода, Гаспар Рише (барон де Пронь), исследуя законы расширения различных газов, пришел в 1795 году к выводу о возможности представления этих законов в виде ряда, членами которого являются затухающие экспоненты [12]. Современные модификации этого подхода обобщены на модель, в которых слагаемыми ряда являются затухающие синусоиды [2, 13, 14]. Именно такая модель и рассмотрена в настоящей статье.

Кратко суть метода в следующем. Пусть имеется $n-1$ значений временного ряда $y(i)$, число n лежит в некотором диапазоне наблюдаемых данных $1 \leq n \leq N$. Тогда значение $y(n)$ можно спрогнозировать следующей суммой из p слагаемых (эту сумму еще называют p -членной моделью комплексных экспонент [2]):

$$y(n) = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1}, \quad (1)$$

где множители h_k и z_k в общем случае комплексны и определяются выражениями

$$\begin{aligned} h_k &= A_k \exp(j\theta_k), \\ z_k &= \exp[(\alpha_k + j2\pi f_k)T]. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначения в выражениях (2) общеприняты: A, θ, α, f – это амплитуда, фаза (в радианах), затухание (в с^{-1}) и частота (в Гц) k -го слагаемого соответственно.

В самом общем случае выражения (1)-(2) определяют задачу спектрального оценивания по методу Прони для произвольных, в том числе и комплекс-

ных, значений ряда. Для задач экономического прогноза естественно предположить, что наблюдаемые данные $y(i)$ – это действительные числа. В этом случае формула (2) для каждой комплексной экспоненты будет содержать её комплексно-сопряжённую пару и ряд (1) примет вид

$$y(n) = \sum_{k=1}^{p/2} 2A_k \exp[\alpha_k(n-1)T] \cos[2\pi f_k(n-1)T + \theta_k]. \quad (3)$$

Здесь важно подчеркнуть усечённый характер ряда в формуле (3) по сравнению с рядом (2) – членов ряда стало в два раза меньше ($p/2$ вместо p) именно в силу комплексной сопряженности слагаемых.

Одной из характеристик метода Прони является то, что его можно отнести к методам авторегрессии [2, 14]. Ранее автор применял этот подход, дополнив его фильтрацией в скользящем окне (АРСС), при моделировании влияния систем трещин в твёрдых телах на отраженный акустический сигнал в задачах дефектоскопии [15], а также при изучении трансформации сейсмических сигналов при прохождении зон вероятного затухания в задачах разведочной геофизики [16].

Подробнее применение метода Прони рассмотрим на модельных данных. Для более компактного представления

результатов рассмотрим небольшую совокупность данных – 21 точку. График наблюдений представлен на рис. 1. Генезис этих данных не играет принципиальной роли и в дальнейшем не обсуждается.

Возьмём из этих данных 16 точек – первое окно обработки (рис. 2), выполним ПП, порядок преобразования $p = 7$.

В результате получим $7 \times 4 = 28$ результирующих параметров (таблица 1).

В таблице 1 в первом столбце даны порядковые номера слагаемых разложения по формуле (3). Представляется логичным отсортировать результат ПП по возрастанию частот во втором столбце. Это связано с тем, что, в отличие от ПФ, при ПП увеличение номера гармоники не влечёт за собой увеличение значения частоты. Сортировка позволяет лучше представить вклад каждой гармоники в итоговое разложение.

Рис. 1. Модельный ряд. Обозначены границы первого и второго окон обработки.

Рис. 2. Первое окно обработки

Таблица 1

Результат ПП для первого окна обработки

№ слагаемого ПП	Частота, Гц	Затухание, 1/сек	Амплитуда, у.е.	Фаза, рад.
3	-0,35571	0,01223	0,01373	3,12106
4	-0,14391	0,01002	0,13788	-0,09935
7	-0,07425	0,14921	0,01355	1,0571
1	0	-8,24433	0,04583	0
6	0,07425	0,14921	0,01355	-1,0571
5	0,14391	0,01002	0,13788	0,09935
2	0,35571	0,01223	0,01373	-3,12106

Обратим внимание на столбец «Частота». В случае спектров Фурье каждой гармонике соответствует частота, определяемая, с одной стороны, теоремой Котельникова [17], а с другой стороны – числом точек в окне преобразования. Поэтому для любых 16-ти отсчетов модельного ряда в случае ПФ выполняются следующие два условия: 1) число гармоник и набор частот будут неизменны, и 2) шаг по частотам постоянен. В случае же ПП эти утверждения не имеют места. То, что шаг по частотам неравномерен, видно уже из таблицы 1. Для проверки первого условия сдвинем окно обработки на 3 отсчета вправо (отсчеты с 4 по 19). Полученная часть модельного ряда приведена на рис. 3, а на рис. 1 помечены границы как первого, так и второго окон обработки).

Очевидно, что число точек в окне осталось прежним – 16, шаг по времени так же остался прежним. Спектр Фурье в этом случае изменится по значениям, но число гармоник и шаг по частоте останутся, очевидно, прежними. Результат ПП показан в таблице 2.

Из сопоставления таблиц 1 и 2 хорошо видно, что для каждого номера гармоники (первый столбец таблиц) получаются различные значения частот (второй столбец). В этом и заключается главное отличие метода Прони от метода Фурье. Именно поэтому вычисление спектра Прони – это дополнительная процедура, не являющаяся непосредственно целью ПП. В настоящей работе вопросы вычисления спектра Прони не рассматриваются, алгоритм приводится, например, в [2].

Рис. 3. Второе окно обработки

Таблица 2

Результат ПП для второго окна обработки

№ слагаемого ПП	Частота, Гц	Загущение, 1/сек	Амплитуда, у.е.	Фаза, рад.
3	-0,35888	-0,03045	0,01822	2,9073
4	-0,1553	-0,02756	0,13574	-2,35662
7	-0,09742	0,15036	0,03178	1,04873
1	0	-1,17644	0,06255	3,14159
6	0,09742	0,15036	0,03178	-1,04873
5	0,1553	-0,02756	0,13574	2,35662
2	0,35888	-0,03045	0,01822	-2,9073

Прогнозирование значений индекса потребительских цен на товары и услуги с помощью ПП

Одним из важнейших числовых показателей в макроэкономике, наряду с ВВП, является индекс потребительских цен на товары и услуги (ИПЦ) [18]. Для решения различных задач применяются несколько разных подходов к вычислению ИПЦ – по отношению к предыдущему месяцу, к декабрю предыдущего месяца и т.п. В настоящей работе анализируются данные ИПЦ двух типов – ИПЦ в % по отношению к аналогичному месяцу предыдущего года и ИПЦ в % по отношению к предыдущему месяцу.

Значения ИПЦ, рассчитанные как % к соответствующему месяцу предыдущего года, взяты с сайта Росстата (данные находятся в открытом доступе на главной странице сайта Федеральной службы государственной статистики

(Росстата) [19]. В таблице 3 данные приведены ежемесячно с 1 января 2017 года и до текущего месяца (на момент проведения расчетов были доступны данные за июнь 2020).

Значение MAE (средняя абсолютная ошибка) = 0,125 вычислялось по обычной формуле:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum |e_i|, \quad (4)$$

здесь n – текущее значение базы прогноза (в данном случае все фактические значения до момента времени $t-1$), t – прогнозируемая точка, $|e_i|$ – абсолютная величина ошибки прогноза в точке.

Данные таблицы 3 представим в графическом виде, при этом будет дана сразу окончательная база ПП – 42 точки: (это по 12 точек за 2017-2019 годы и еще за 6 месяцев текущего, 2020, года).

Таблица 3

Данные Росстата [19] по индексу потребительских цен.
Курсивом показаны результаты ПП

2017 год		2018 год		2019 год		2020 год	
105,04	<i>105,0685</i>	102,19	<i>102,286</i>	104,99	<i>104,8867</i>	102,42	<i>102,6617</i>
104,06	<i>104,0804</i>	102,18	<i>102,0139</i>	105,22	<i>105,0331</i>	102,31	<i>102,4703</i>
104,25	<i>104,2285</i>	102,35	<i>102,1635</i>	105,25	<i>105,0563</i>	102,54	<i>102,7449</i>
104,14	<i>104,119</i>	102,4	<i>102,1005</i>	105,17	<i>105,1132</i>	103,09	<i>102,8536</i>
104,09	<i>104,213</i>	102,41	<i>102,2312</i>	105,13	<i>104,96</i>	103,02	<i>102,931</i>
104,35	<i>104,5183</i>	102,29	<i>102,2676</i>	104,66	<i>104,7078</i>	103,21	103,16
103,86	<i>103,8942</i>	102,5	<i>102,5675</i>	104,58	<i>104,5559</i>	MAE	0,1252
103,27	<i>103,2843</i>	103,6	<i>103,5112</i>	104,31	<i>104,161</i>		
102,96	<i>103,0404</i>	103,38	<i>103,6618</i>	103,99	<i>103,8096</i>		
102,72	<i>102,8206</i>	103,54	<i>103,7476</i>	103,75	<i>103,6714</i>		
102,49	<i>102,6764</i>	103,83	<i>104,0079</i>	103,53	<i>103,4086</i>		
102,51	<i>102,7192</i>	104,26	<i>104,3579</i>	103,04	<i>103,1246</i>		

Оценка ИПЦ методом Прони, $p=19$

Рис. 4. Сравнение фактической кривой ИПЦ (данные Росстата, [19], сплошная линия) и результата настоящей работы, штриховая линия

На рис. 4 фактические данные показаны сплошной линией (кривая ИПЦ с сайта Росстата [19]), а результат ПП – штриховой линией. Метод Прони правильно отслеживает характер поведения показателя, но локальные выбросы сглаживает. Отсюда и довольно высокое значение MAE – около 12,5 %.

Для ряда действительных данных из N точек для оценивания методом Прони порядок оценивания p лежит в интервале $3 \leq p \leq (N-1)/2$ и должен быть нечетным числом [2] (это должно быть понятно из структуры таблиц 1 и 2). В случае $N = 42$ порядок оценивания равен 19. Ряд (3) при этом имеет 10 различных слагае-

мых: одно слагаемое соответствует нулевой частоте, и $(p-1)/2$ слагаемых в случае действительных чисел входят в формулу (3) парами. В таблице 4 приводятся коэффициенты ПП для данных по ИПЦ.

В таблице 4 данные отсортированы по возрастанию частоты (второй столбец), поэтому для понимания работы ПП, так же, как и в таблицах 1 и 2, добавлен первый столбец – истинные порядковые номера слагаемых ряда (3). Характерными для окна преобразования являются гармоники № № 12, 2 и 5, они, наряду с статической составляющей (гармоника № 8) дают максимальный по амплитуде вклад в динамику кривой.

Обратимся теперь непосредственно к *процедуре прогноза*. Метод Прони не так часто используется вообще, и для экономического прогноза – в частности, поэтому необходимо иметь возможность количественного сравнения результатов нашего прогноза с опубликованными данными. Для этой цели были взяты данные Центра макроэкономического прогнозирования (ЦМП) Высшей школы экономики [20]. Ими выполняется помесечный прогноз, в частности, для ИПЦ, вычисленных в % по отношению к предыдущему месяцу.

Нами для прогноза взяты данные, начиная с августа 2018 года – именно эти числа доступны по ссылке [20] на момент проведения расчетов. На сайте [20] представлены фактические данные Росстата [19] и прогноз ЦМП ВШЭ с августа 2018 года по апрель 2020 года за исключением июля 2019 года (без объяснения причин). По методу Прони были спрогнозированы 21 значения (включая июль 2019 года), затем наши оценки и оценки ЦМП были сопоставлены. Результаты сведены в таблицу 5.

Таблица 4

Результат ПП для ИПЦ, $p = 19$

№ слагаемого ПП	Частота, Гц	Затухание, 1/сек	Амплитуда, у.е.	Фаза, рад.
8	0	0,00029	102,9374	0
12	0,04163	0,0065	0,58378	-0,57322
16	0,08462	-0,0278	0,11075	-1,41009
1	0,14545	0,02353	0,04798	1,22977
5	0,2071	-0,02644	0,14393	-0,50415
9	0,25409	-0,00964	0,04348	0,38475
13	0,33074	-0,07733	0,07498	-1,2134
2	0,36566	-0,07625	0,18902	0,16166
6	0,41886	-0,04389	0,07732	0,43284
10	0,46589	-0,00092	0,0374	-0,08036

Таблица 5

Сравнение двух прогнозов ряда ИПЦ

Факт	Прони	ЦМП	Δ Прони	Δ ЦМП
100,01	100,46	99,83	0,446	0,18
100,16	100,36	100,32	0,204	0,16
100,35	100,38	100,34	0,027	0,01
100,50	100,38	100,45	0,116	0,05
100,84	100,51	100,71	0,331	0,13
101,01	100,66	101,06	0,349	0,05
100,44	100,56	100,67	0,122	0,23
100,32	100,55	100,35	0,233	0,03
100,29	100,59	100,33	0,301	0,04
100,34	100,43	100,38	0,092	0,04
100,04	100,45	100,39	0,409	0,35
100,20	100,21	100,39	0,012	0,19
99,76	100,26	100,15	0,502	0,39
99,84	100,12	100,05	0,278	0,21
100,13	100,15	99,76	0,019	0,37
100,28	100,45	100,32	0,168	0,04
100,36	100,5	100,57	0,142	0,21
100,40	100,49	100,66	0,092	0,26
100,33	100,36	100,17	0,03	0,16
100,55	100,37	100,39	0,177	0,16
100,83	100,52	100,45	0,307	0,38
		MAE	0,2074	0,1733

Рис. 5. Сравнение графиков ИПЦ – фактические данные Росстата (ряд 1), прогноз методом Прони (ряд 2) и прогноз ЦМП ВШЭ [20]

Эти же данные приведены на графике (рис. 5). Видно, что с увеличением базы, начиная с 15-16 значения, прогноз по ПП становится достаточно адекватным. Сравнивая значения рассчитанных средних абсолютных ошибок (0,2074 для ПП и 0,1733 для ЦМП), можно сделать вывод о неплохом соответствии прогноза по ПП и опубликованных данных от ЦМП ВШЭ.

Здесь нужно подчеркнуть различие в методиках прогноза, выполняемого по методу Прони в настоящей работе, и прогноза, выполняемого в ЦМП НИУ ВШЭ. Прогноз с помощью ПП выполняется только лишь на основе имеющегося временного ряда. Никакие иные факторы прошлых периодов, существующие данные и модели, предположения о трендах и внешних воздействиях не учитываются. Эта та самая чистая модель временного ряда, про которую авторы [21] писали «These are the work-horse of the forecasting industry...». Свои же прогнозы ЦМП выполняет по нескольким моделям [20], учитывающим самые разнообразные факторы. В этом смысле недостатки и достоинства метода Прони очевидны. Мы не можем, используя ПП, улучшить прогноз, учитывая вновь появившиеся

прямые и косвенные данные, способствующие более точному пониманию генезиса числовых значений. С другой стороны, ценность прогноза, не учитывающего известные уже предстоящие факторы, может оказаться невелика, но простота в получении результатов прогноза может оказаться решающим фактором.

Заключение

В работе описан метод Прони. Показаны некоторые особенности преобразования Прони, поведение его составляющих, отличие преобразования Прони от преобразования Фурье. Выполнено приближение поведения кривой индекса потребительских цен на товары и услуги с помощью ряда Прони. Для сравнения с опубликованными данными выполнен помесечный прогноз ИПЦ, вычисленного в % по отношению к предыдущему месяцу. Показана сопоставимость результатов прогноза по методу Прони и прогноза по методикам ЦМП НИУ ВШЭ.

Автор данной работы считает, что преобразование Прони может представлять интерес как в сугубо теоретическом смысле, так и при выполнении практических задач анализа и прогноза в экономике.

Библиографический список

1. Чупина С.В. Прогнозирование национальной экономики: Учебное пособие / С. В. Чупина; ГОУ ВПО «Томский государственный педагогический университет». Томск: Изд-во ТГПУ, 2010. 144 с.

2. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.
3. Montgomery D.C., Jennings C.L., Kulahci M. Introduction to time series analysis and forecasting. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc. 2015.
4. Liao T.W. Clustering of time series data – a survey / T. W. Liao // Pattern Recognition. 2005. Vol. 38, no. 11. Pp. 1857–1874. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320305001305>.
5. Corduas, M. Time series clustering and classification by the autoregressive metric / M. Corduas, D. Piccolo // Computational Statistics & Data Analysis. 2008. Vol. 52, no. 4. Pp. 1860–1872. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167947307002368>.
6. Хайруллина О.И. Эконометрика: базовый курс / О. И. Хайруллина, О.В. Баянова. Пермь. 2019. 176 с.
7. Афанасьева Т.В. Моделирование нечетких тенденций временных рядов / Т.В. Афанасьева. Ульяновск: УлГТУ, 2013. 215 с.
8. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 755 с.
9. Pritz P.J., Perez D., Leung, K.K.: Fast-Fourier-forecasting resource utilization in distributed systems (2020) <https://arxiv.org/pdf/2001.04281.pdf>.
10. Кулаичев А.П. Методы и средства комплексного анализа данных, ИНФРА-М, 2006. 512 с.
11. Буреева Н.Н., Ершова Ю.С. Влияние Фурье-фильтрации на построение прогноза экономических показателей с использованием аддитивной и мультипликативной моделей // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 3 (2). С. 20–24.
12. Prony R. Essai expérimental et analytique: Sur les lois de la Dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la Force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, à différentes températures. J. l'Ecole Polytechnique. 3(1795). V. 1, cahier 22. P. 24–79.
13. S. Marple, Spectral line analysis via a fast Prony algorithm/ ICASSP '82. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Paris, France, 1982, pp. 1375-1378. DOI: 10.1109/ICASSP.1982.1171448.
14. S.M. Kay and S. L. Marple, «Spectrum analysis A modern perspective,» in Proceedings of the IEEE, vol. 69, no. 11, pp. 1380-1419, Nov. 1981. DOI: 10.1109/PROC.1981.12184.
15. Немирович-Данченко М.М. Возможности обнаружения множественной трещиноватости сплошной среды на основе оценки спектральной плотности энергии отраженного сигнала // Физ. мезомех. 2013. Т. 16. № 1. С. 105-110.
16. Islyamova A., Nemirovich-Danchenko M., Terre D. Detection of attenuation zones in a time section based on running window filtration // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. IOP Publishing, 2016. T. 43. № 1. С. 012056.
17. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. 236 с.
18. International Labour Office (ILO) and others, Consumer Price Index Manual: Theory and Practice (Geneva, ILO, 2004).
19. <https://www.gks.ru/> (дата обращения: 18 июля 2020).
20. https://economics.hse.ru/cmfcpi_months_rus (дата обращения: 17 июля 2020).
21. Clements M.P., & Hendry D.F. (2007). An overview of economic forecasting (pp. 1–18). Blackwell Publishing Ltd.